

# Cevap Anahtarı

## 2018-2019 BAHAR DÖNEMİ CEBİR II QUIZ SORULARI

1)  $R$  bir Boole halkası olsun.  $a, b \in R$  idempotent ise  $a+b$  de idempotenttir, gösteriniz.

Çözüm: 1.Yol:  $a, b \in R$  idempotent ise  $a^2 = a$  ve  $b^2 = b$  dir.  
 $a+b$ 'nin idempotent olduğunu göstermek için  $(a+b)^2$ 'nin  $a+b$ 'ye eşit olduğunu göstermeliyiz.  
$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a + ab + ab + b \quad \leftarrow \text{Boole halkası değişmeli olduğundan} \\ &= a + 2ab + b \quad \leftarrow \text{Boole halkasının karakteristiği 2 olduğunda} \\ &= a + 0_R + b \\ &= a+b \end{aligned}$$

2.Yol:  $R$  Boole halkası olduğundan her elemanı idempotenttir.  $a, b \in R$  ise toplamsal kapalıktan  $a+b \in R$  olup  $a+b$  de idempotenttir.

2)  $A = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \mid (x, y) = 1, 13 \nmid y \right\}$  halkası verilsin.  $I = \left\{ \frac{x}{y} \in A \mid 13 \mid x \right\}$ ,  $A$ 'nin bir ideali midir?

Çözüm: •  $I \neq \emptyset$ :  $\frac{x}{y} \in A \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$  old. sonsuz tane elemanı vardır. Yani  $I \neq \emptyset$

•  $I \subseteq A$ :  $I$ 'nin tanımından açıktır.

\*  $\forall \frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2} \in I$  için  $\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} \in I$  olur mu?

$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2} \in I \Rightarrow 13 \mid x_1 \wedge 13 \mid x_2 \Rightarrow x_1 = 13k_1, x_2 = 13k_2$  or  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_1 y_2} = \frac{13k_1 y_2 - 13k_2 y_1}{y_1 y_2} = \frac{13(k_1 y_2 - k_2 y_1)}{y_1 y_2}$$

$\Rightarrow \frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} \in I$  olur

\*\*  $\forall \frac{x}{y} \in A, \forall \frac{x_1}{y_1} \in I$  için  $x_1 = 13k$  or  $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{x}{y} \cdot \frac{x_1}{y_1} = \frac{13k \cdot x}{y \cdot y_1} \in I$  olduğundan  $I, A$ 'nin ideali dir.